775. 双曲線型偏微分方程式ノ存在定理ニ付イテ

南雲 道夫（阪大）

1 双曲線型偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ニ於テ，$x=a$ ノ時 $u=h(y)$，$y=b$ ノ時 $u=g(x)$ 〔$h(b)=g(a)=0$〕ナル積分ノ存在ヲ問題トスル。

$F(x, y, u, p, q)$ ガ (x, y, u, p, q) ニツイテ只連続ト仮定シタノデハカヽル積分ノ存在ハ証明出来ナイ。

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right.$ ガ連続ナルモノヲ求メル時ニ$\left.\right)$

何トナレバ、例ヘバ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \Phi(q)=\begin{cases}2\sqrt{q} & q>0 \text{ ノトキ} \\ -2\sqrt{-q} & q \leqq 0 \text{ ノトキ}\end{cases}$$

トスレバ $\Phi(q)$ ハ連続デアルガ $h(y)=\frac{\varepsilon}{2} y^2$，$g(x)=0$ $a=0$，$b=0$ トスレバ

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\begin{cases}(x-\sqrt{\varepsilon y})^2 & y>0 \text{ ノトキ} \\ -(x-\sqrt{-\varepsilon y})^2 & y \leqq 0 \text{ ノトキ}\end{cases}$$

従ツテ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=+0}=x^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=-0}=-x^2$$

之レハ $y=0$ デ連続トアル。

$\boxed{2}$ 次ニ $F(x, y, u, p, q)$ ガ (x, y, u, p, q) ニツキ連続ナル上ニ p, q ニツイテ Lipschitz ノ條件

(1) $$|F(x, y, u, p_1, q_1)-F(x, y, u, p_2, q_2)| \leqq L\{|p_1-p_2|+|q_1-q_2|\}$$

ガ成立スルトキニ，積分ノ存在ヲ函数空間デノ不動点ノ存在

定理ニヨリ証明シヨウ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho(x, y) \text{ トオケバ}$$

$$u = g(x) + h(y) + \int_a^x \int_b^y \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g'(x) + \int_b^y \rho(x, \eta)\, d\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h'(y) + \int_a^x \rho(\xi, y)\, d\xi$$

従ッテ問題ハ $\rho(x, y) =$

$$F\left(x, y, g(x) + h(y) + \int_a^x \int_b^y \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\ g'(x) + \int_b^y \rho(x, \eta)\, d\eta,\ h'(y) + \int_a^x \rho(\xi, y)\, d\xi\right)$$

ナル $\rho(x, y)$ ノ存在デアル。

所デ $\int_a^x \int_b^y \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ ハ vollstetig ナ運算デアルガ $\int_a^x \rho(\xi, y)\, d\xi$ ヤ $\int_b^y \rho(x, \eta)\, d\eta$ ハ [(x, y) ノ函数ニ対シテハ] vollstetig デハナイ。(註) 故ニ函数空間内ノ不動点存在定理ヲ應用スルタメニハ、$\rho(x, y)$ ニ一様有界性ノ他ニナホ適當ナ制限（緊集合ヲ作ル様ナ）ヲ附ケネバナラナイ。

ソコデ次ノ様ニ考ヘル。

$F(x, y, u, p, q)$ ハ $|x-a| \leqq l$, $|y-b| \leqq l$,

(註) 例ヘバ特ニ $\rho(x, y) = \rho_1(x) \cdot \rho_2(y)$ ナル形ニシテ考ヘテ見レバヨイ。

$|u|\leqq m$, $|p|\leqq m'$, $|q|\leqq m'$ ナル範囲デ連続，且ツ $|F(\ )|\leqq M$ トスル. 今コノ範囲内ニ (x, y, u, p, q) 及ビ (x', y', u', p, q) ヲトリ

$$(2)\quad \underset{\substack{|x'-x|\leqq\delta\\|y'-y|\leqq\delta\\|u'-u|\leqq 2M\delta}}{\mathrm{Max}}\left\{\left|f(x', y', u', p, q)-f(x, y, u, p, q)\right|, M\delta\right\}=\varphi(\delta)$$

トオク. ソコデ $\mathfrak{K}$ ヲバ $|x-a|\leqq l$, $|y-b|\leqq l$ デ $|\rho(x,y)|\leqq M$ 且ツ

$$\underset{\substack{|x'-x|\leqq\delta\\|y'-y|\leqq\delta}}{\mathrm{Max}}\left|\rho(x', y')-\rho(x, y)\right|\leqq k\,\varphi(\delta)\quad (k\ 一定)$$

ナルヤウナ連続ナ函数ノ全体トスル. $\mathfrak{K}$ ハ凸且ツ緊集合ヲ作ル。

次ニ $x=a$，及ビ $y=b$ ニ於ケル初期條件ヲ $u(a,y)=0$, $u(x,b)=0$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ〔$u=g(x)+h(y)+v$ トオキ v ノ方程式ヲ考ヘレバヨイ〕. 扨テ

$$\tilde{\rho}(x,y)=F\left(x, y, \int_a^x\int_b^y \rho(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \int_b^y \rho(x,\eta)\,d\eta, \int_a^x \rho(\xi,y)\,d\xi\right)$$

ナル変換〔$\rho(x,y)\longrightarrow\tilde{\rho}(x,y)$〕ヲ考ヘル. 之レハ $l^2M\leqq m$, $lM\leqq m'$ ナル限リ常ニ可能デアリ，$|\tilde{\rho}(x,y)|\leqq M$ トナル. 次ニ $\tilde{\rho}(x,y)$ ノ連続ノ度合ヲシラベルト，(1)〔p, q ニ関スル Lipschitz 條件〕及ビ (2) カラ

$$\underset{\substack{|x'-x|\leqq\delta \\ |y'-y|\leqq\delta}}{\mathrm{Max}}\ |\tilde{\rho}(x',y')-\tilde{\rho}(x,y)|\leqq[1+2L(lk+1)]\,\varphi(\delta)$$

故ニ $l<\dfrac{1}{2L}$ ノ場合ニ k ヲ充分大 $\left(k\geqq\dfrac{2L+1}{1-2Ll}\right)$ ニトレバ

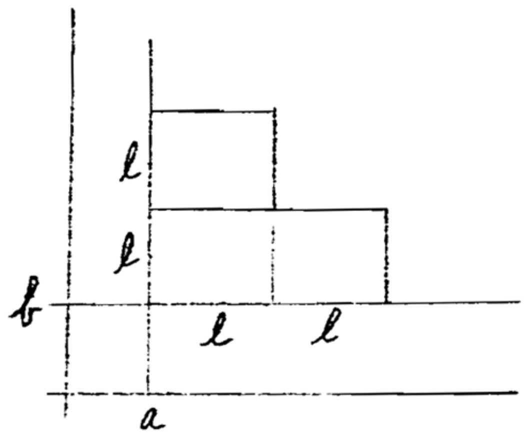
$$|\tilde{\rho}(x',y')-\tilde{\rho}(x,y)|\leqq k\varphi(\delta)$$

トナリ，$\tilde{\rho}(x,y)\in\mathfrak{K}$ ヲ得ル。従ツテ Schauder ノ不動点ノ存在定理カラ

$$\tilde{\rho}(x,y)=\rho(x,y)$$

ナル $\rho(x,y)$ ガ存在スル。故ニ求ムル積分ガ存在スル。

尚上ニ $l<\dfrac{1}{2L}$ ナル制限ヲ附シタガ之レハ次ノヤウニシテ除カレル。（コノ制限ハ $\varphi(\delta)$ ノ大サトハ無関係デ只 L ノミニヨツテ決定サレルモノデアル）。先ヅ上ニヨリ $\rho(x,y)$ 従ツテ u ハ $a\leqq x\leqq a+l$，$b\leqq y\leqq b+l$ デ連続ニ定義サレル。



次ニ $a+l\leqq x\leqq a+2l$，$y=b$ ニ於ケル u ノ値及ビ $x=a+l$，$b\leqq y$，$b+l$ ニ於ケル u ノ値カラ $a+l\leqq x\leqq a+2l$，$b\leqq y\leqq b+l$ ナル範囲デ $\rho(x,y)$，$u(x,y)$ ガ求マル。同様ニシテ $a\leqq x\leqq a+l$，$b+l\leqq y\leqq b+2l$ ナル範囲デノ u ガ求マル。第三ニハ $a+l\leqq x\leqq a+2l$，

$b+l \leqq y \leqq b+2l$ ナル範囲ノuガ求メラレル。以下同様ノ方法ヲ繰返セバヨイ。

$\boxed{3}$ Fガp, q ニツトLipschitz條件ヲ満足スルトキニハ領域分割法ニヨリ（細分ノ極限ヲトル方法デ）積分存在ガ証明サレルコトガ福原氏著偏微分方程式論（223頁）〔岩波講座〕ニ示サレテアル。ソコデハ必ズシモLipschitzノ條件ニ限ラストアルケレドモ茲ニ述ベタ方法デLipschitzノ條件ヲ緩メルニハ如何ニシタラヨイデセウカ。

尚、小生偏微分方程式ニツイテハ未ダ殆ンド何モ勉強シテナイノデ古クカラ知ラレテキルコトアモ知ラズニ居ル事ガ極メテ多イノデス。コノコトニ関シ文献等デモ御氣附ノ御方ニハ御手数ナガラ何卒御一報ノ程ヲ御願ヒ致シマス。

追　記

Fガp, qニ付イテLipschitzノ條件ガ成立セヌ時デモ，之ガ連続デ

$$|F(x,y,u,p',q)-F(x,y,u,p,q)| \leqq \phi(x,y,|p'-p|),$$

$$|F(x,y,u,p,q')-F(x,y,u,p,q)| \leqq \psi(x,y,|q'-q|),$$

且ツ $\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}=\phi(x,y,\lambda)$, $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\psi(x,y,\mu)$ ナル方程式（実質的ニハ常微分方程式）ニツキ初期條件 $\lambda(x,b)=0$, $\mu(a,y)=0$ ナル解ガ只一ツナルトキニハ存在定理ガ証明出来ル様デス。

但シコノ場合ニハ $p(x,y)$, $q(x,y)$ 及ビ $u(x,y)$

ヲ独立ナ函数トシテ取扱ヒ，夫々別々ニ適宜ナ連続性ノ程度ノ條件ヲ付ケテ

$$\tilde{u}=\int_a^x\int_b^y F(\xi, \eta, u, p, q)\, d\xi\, d\eta$$

$$\tilde{p}=\int_b^y F(x, \eta, u, p, q)\, d\eta$$

$$\tilde{q}=\int_a^x F(\xi, y, u, p, q)\, d\xi$$

ナル変換ノ不動点 $(\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q})=(u, p, q)$ ノ存在ヲ証明スルノデス。

尚、$F(x, y, u, p, q)$ ガ連続ナルトキニハ（或ハモット緩クテモヨイデセウ）u, p, q ニツイテ連続，全部ノ変数ノ函数トシテハ有界可測位デモ）$p, q, \frac{\partial u}{\partial x \partial y}$ ガ可測ナル積分ガ存在スルノデハナイデセウカ。御教示ヲ得タク存ジマス。